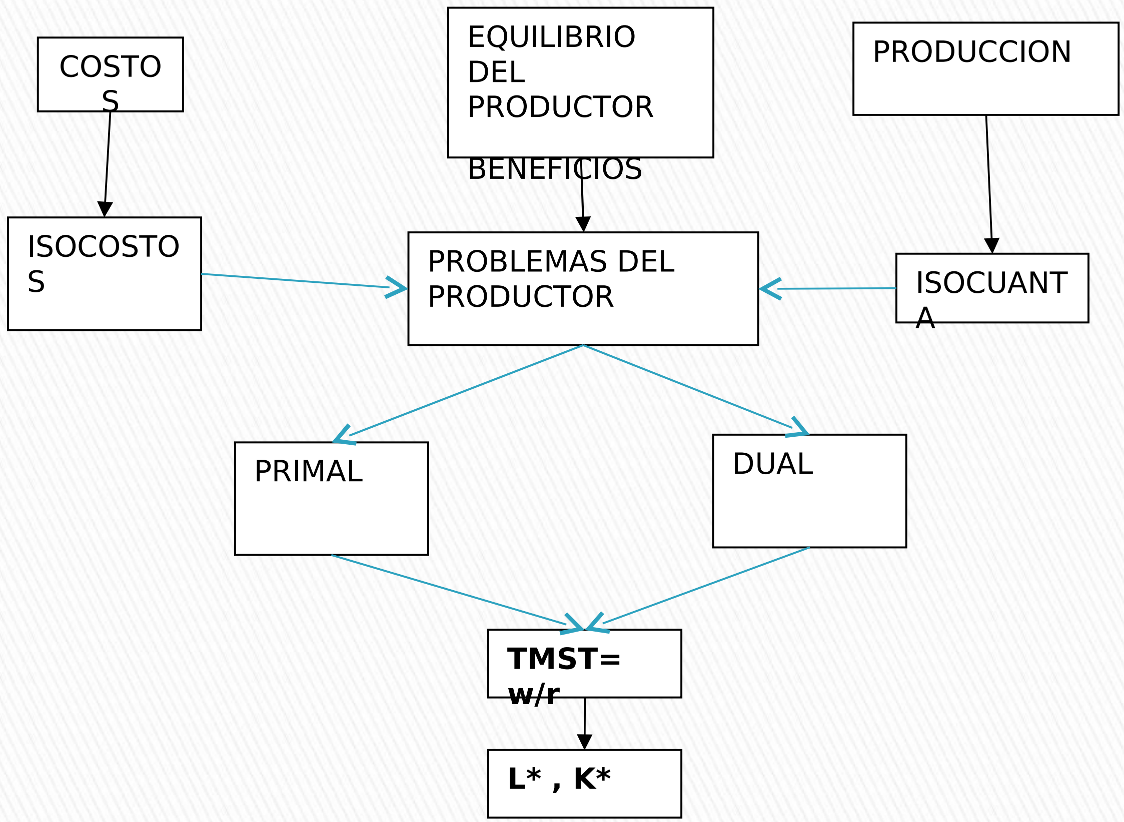
Problema primal y dual en la teoría del productor

Integrantes
Montenegro Llanco, Alexandra
Silva Nicolas, Luis
Torres Carpio, Erika
Vilchez Quispe, Roland

PROBLEMA PRIMAL Y DUAL EN LA TEORÍA DEL PRODUCTOR



Veamos unos conceptos previos:

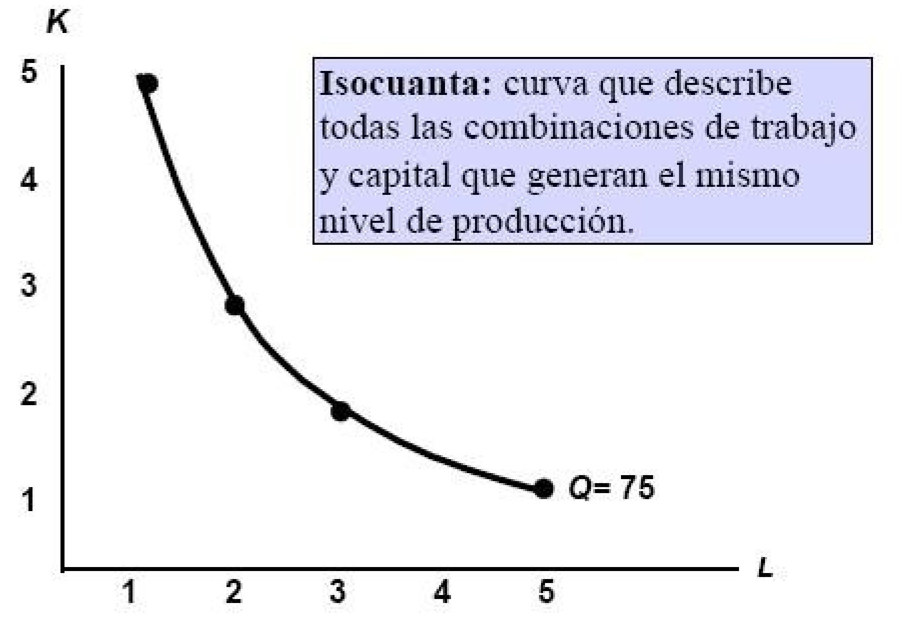
- **Isocuanta:**

Representa diferentes combinaciones de insumos a partir de las cuales se puede producir el mismo nivel de producto.

$Q= f(K, L)$

Con pendiente:

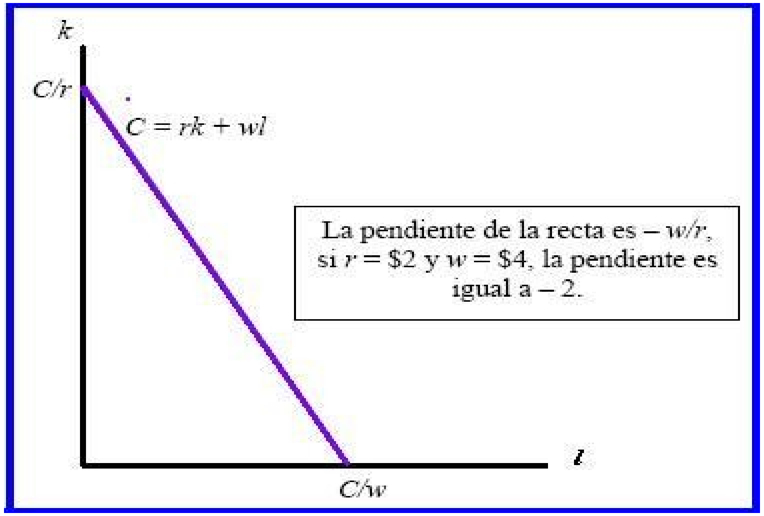
$$\boxed{RMST = -\Delta K / \Delta L}$$



Recta Isocoste:

Conjunto de puntos de este espacio que representan combinaciones de factores cuyo coste es idéntico.

La pendiente de esta línea será –w/r que es la relación de precios de los factores utilizados para producir.



Problema primal: Maximizar la producción sujeta a una restricción de costos dados

$$\max_{k,l} q(k,l) \text{ sujeto a } CT = rk + wl$$

El Lagrangeano de este problema:

$$L = q(k,l) + \phi\left[CT - rk - wl\right]$$

Condiciones de Primer Orden:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial k} - \phi r - = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\partial q / \partial k}{r}$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial l} - \phi w = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\partial q / \partial l}{w}$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow CT - rk - wl = 0$$

Igualando (1) y (2), tenemos:

$$\frac{\partial q / \partial k}{r} = \frac{\partial q / \partial l}{w}$$

$$\frac{\partial q / \partial k}{\partial q / \partial l} = \frac{r}{w} \Rightarrow TMST_{k,l} = \frac{r}{w}$$

Problema Dual : Minimización de costos sujeta a una producción dada

$$\min_{k,l} CT = rk + wl \text{ sujeto a } q^{*} = q(k,l)$$

$$\underset{k,l}{Min}\, CT = rk + wl \text{ sujeto a } q^* = q(k,l)$$

El Lagrangeano de este problema:

$$L = rk + wl + \gamma\left[q^* - q(k,l)\right]$$

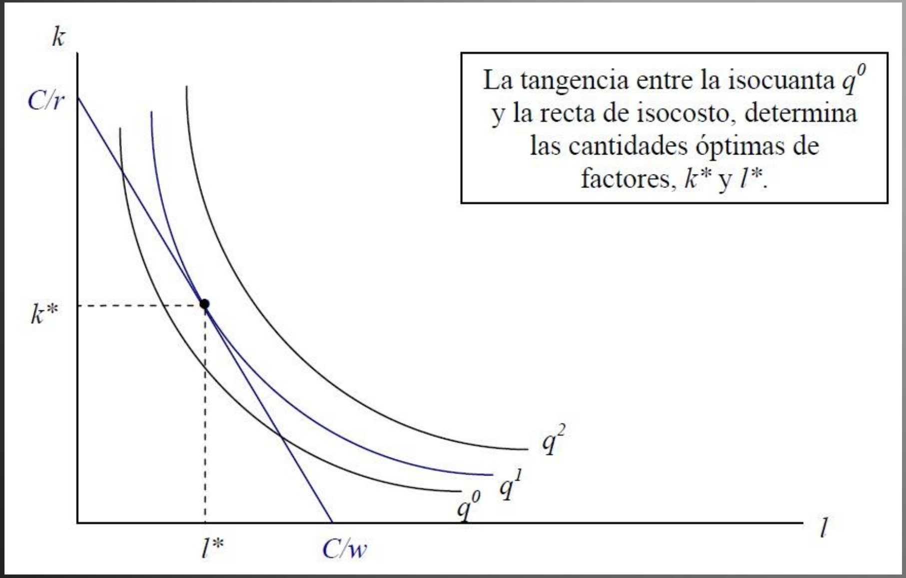
Condiciones de Primer Orden:

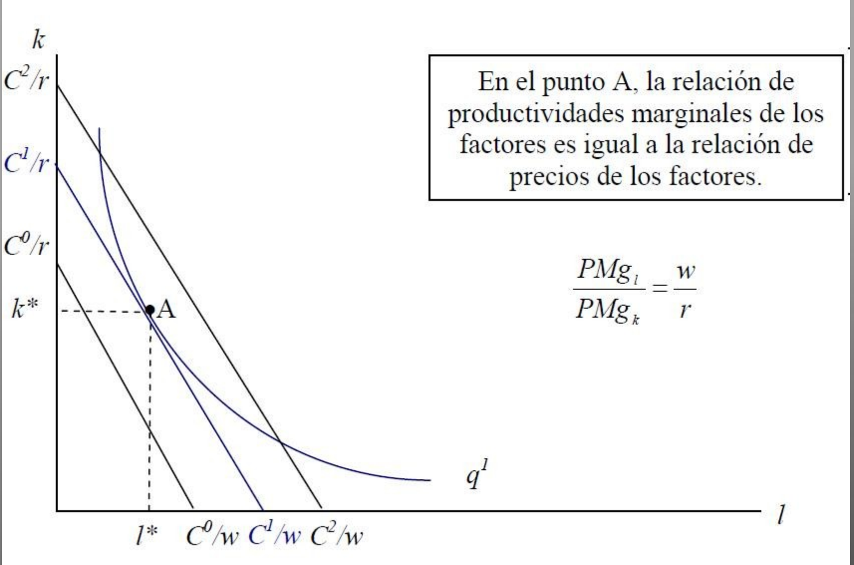
$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \Rightarrow r - \gamma \frac{\partial q}{\partial k} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{r}{\partial q / \partial k}$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Rightarrow w - \gamma \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{w}{\partial q / \partial l}$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow q^* - q(k,l) = 0$$

Observamos que se cumple la misma condición para los dos problemas y de ellos se obtienen las demandas condicionadas de factores.





Comparación entre la teoría del consumidor y la teoría de la empresa

comparaciones

Consumidor

1) MaxU
   sa.RP $I=P_x x+P_Y y$

$Z=u(X,Y)+\lambda(I-P_x x-P_Y y)$

2)TMS= $\dfrac{(\partial U/\partial \overline{x})}{(\partial U/\partial Y)}$ $\dfrac{Px)}{PY)}$

3) $t^1 e=e(tP_x,tP_Y,U)$

Empresa

1) Max.Q
   sa.$CT=wL+rK$

$Z=Q(L,K)+\lambda(CT-wL-rK)$

2)TMS= $\dfrac{PMgL)}{PMgK)}=\dfrac{w}{r}$

3) $t^1 Q=Q(tL,tK,)$

Comparación

CONSUMIDOR	Empresa
4) Min. $e(P_x, P_Y, U)$ sa. $U(X,Y)$ $Z=P_x x+P_Y y+\lambda(U-u(X,Y))$	4)Min. $CT(w,r,)=wL+rK$ sa. $Q=q(L,K)$ $Z= wL+rK +\lambda(Q-q(L,K))$
5) Las demandas compensadas. $X_H= X_H(P_x, P_Y,U)$ $Y_H= Y_H(P_x, P_Y,U)$	5)Las demandas condicionadas. $L_D= L_D(w,r,Q)$ $K_D= K_D(w,r,Q)$

COMPARACIONES

Consumidor	Empresa
6) Shepard: $X_{H} = \partial e/\partial P_{X}$ $Y_{H} = \partial e/\partial P_{Y}$	6) Shepard: $L_{D} = \partial C/\partial w$ $K_{D} = \partial C/\partial r$

APLICACIONES DE LA DUALIDAD EN LA TEORÍA DE LA EMPRESA

1. EL PROBLEMA DUAL EN LA TEORIA DE LA EMPRESA.

APLICACIÓN 1: PROBLEMA DUAL.

“El paraíso de la hamburguesa”

Produce hamburguesas por hora.

K parrilladas
r precio de alquiler por hora

L trabajadores contratados
w precio de un trabajador por hora

Función de producción : $q = 10\,K^{1/2}L^{1/2}$

El costo total de la producción: $CT = rK + wL$

entonces resolveremos el problema dual en la teoría de la empresa:

$$Mn \quad CT = rK + wL \qquad s.a \quad Q = 10\,K^{1/2}L^{1/2}$$

$$Z = rK + wL + \lambda(Q - 10\,K^{1/2}L^{1/2})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = r - \lambda 5K^{-1/2}L^{1/2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = w - \lambda 5K^{1/2}L^{-1/2} = 0$$

$$\frac{r}{w} = \frac{L}{K} \quad \rightarrow L = \frac{r}{w}K ......(1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q - 10K^{1/2}L^{1/2} = 0 \qquad (2)$$

$$Q = 10\left[\frac{wL}{r}\right]^{1/2} L^{1/2}$$

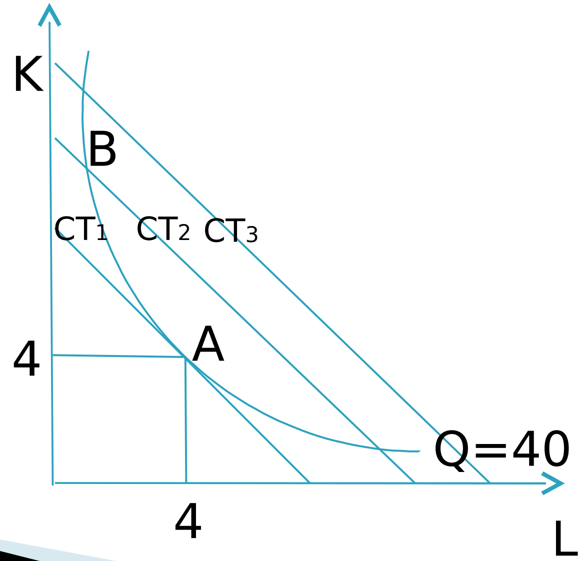
- Supongamos que desean producir 40 hamburguesas por hora, y r= 4, w= 4.

$$Q = 10\left[\frac{wL}{r}\right]^{1/2} L^{1/2}$$

$$40 = 10\left[\frac{4L}{4}\right]^{1/2} L^{1/2}$$

$$4 = L$$

$$4 = K$$



$$CT_1 = 32$$

$$CT_2 = 40$$

- 2. EL PROBLEMA PRIMAL EN LA TEORIA DE LA EMPRESA.

Función de producción de la empresa :

$$q = 10\,K^{1/2} L^{1/2}$$

El costo total de la producción:

$$CT = rK + wL$$

Datos del problema:

$$r = w = 4 \qquad CT = 32$$

$$\max \quad Q = 10\,K^{1/2} L^{1/2}$$

$$s.a \quad CT = rK + wL$$

En este caso, la expresión lagrangiana del problema de maximización de producción de la empresa sería:

$$\max Z = 10K^{1/2}L^{1/2} + \lambda(CT - rK - wL)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 5K^{-1/2}L - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = 5K^{1/2}L - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\text{Pmg}_K}{\text{Pmg}_L} = \frac{r}{w} \Rightarrow \frac{5K^{-1/2}L^{1/2}}{5K^{1/2}L^{-1/2}} = \frac{L}{K} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow K = L \text{...........(1)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = CT - rk - wL = 0 \qquad (2)$$

$*$ Hallando la combinación óptima de factores

$(1)..en..(2)$

$$CT = 4L + 4L \Rightarrow CT = 8L$$

$$como..CT = 32 \quad \Rightarrow \quad L = 4$$

$$K = 4$$

$*$ ahora hallamos "q" que máximiza la producci ón

reemplazan do "k" y "L" *en* la funci ón de producci ón

$$q = 10[4]^{1/2}[4]^{1/2} \Rightarrow q = 40$$

ANALISIS GRÁFICO

$$\frac{Pmg_K}{Pmg_L} = \frac{r}{w}$$